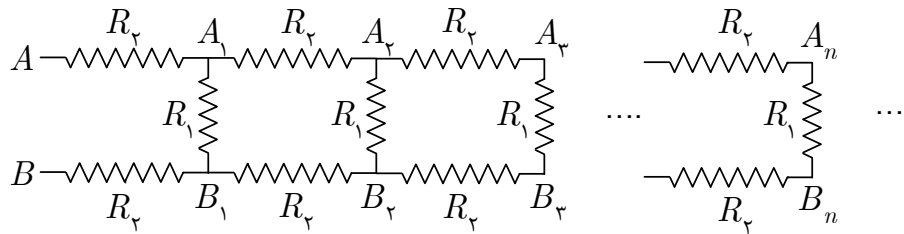
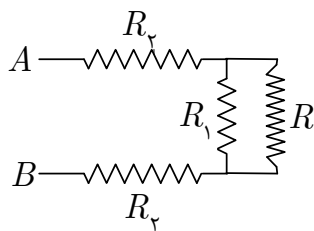




۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت های  $R_p - R_1 - R_p$  بین دو نقطه  $A$  و  $B$  بی نهایت بار تکرار می شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی نهایت تکرار می شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر  $R$  باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می شود.

آ) مقاومت  $R$  بین دو نقطه  $A$  و  $B$  را بر حسب  $R_1$  و  $R_p$  به دست آورید.

در بخش های زیر فرض کنید ولتاژ  $V_0$  را به دو سر  $A$  و  $B$  وصل کرده ایم.

ب) ولتاژ  $V_1$  بین  $A_1$  و  $B_1$  در مدار شکل ۱ بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$  و  $R_p$  چقدر است؟

پ) ولتاژ بین  $A_n$  و  $B_n$  روی دو سر  $n$  امین  $R_1$  در مدار شکل ۱ بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$ ،  $R_p$  و  $n$  چقدر است؟

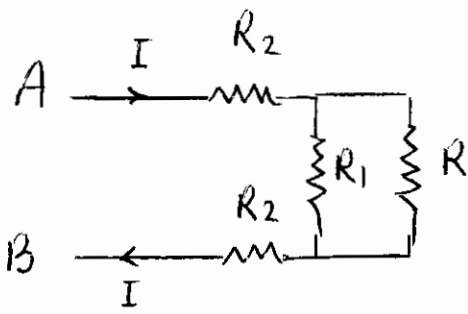
ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت های  $R_1$  را با  $P_1$  نشان می دهیم.  $P_1$  را بر حسب  $V_0$ ،  $R_1$  و  $R_p$  به

دست آورید.

ث) با فرض آن که  $x = \frac{R_1}{R_p}$  و  $y = \frac{P_1}{P}$  که  $P$  توان کل مصرفی در مدار است، رابطه  $y$  بر حسب  $x$  را به

دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

(1) مسئله



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1} \quad (1)$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \quad (1)$$

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2I \quad (2)$$

$$\boxed{V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2 \quad (3)$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

(ت) توان مصرفی در  $n$  امین  $R_1$  ها  $P_n^{(R_1)}$  است

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در  $R_1$  ها :

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n} = \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \quad (4)$$

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2 (R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2})}{2R_1 \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

با تکرار تابع  $R$  از معادله (1) در (4) و ساده کردن جواب

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

ث) توان کل مصرفی در مدار

$$y = \frac{P_1}{P}$$

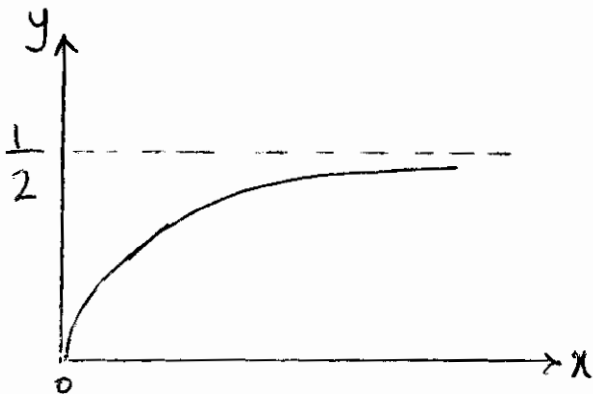
سپس از ساده‌سازی و در معادله

به نسبتی در زیر حل می‌کنیم

$$y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \right)$$

اگر  $\frac{R_1}{R_2}$  را  $x$  بنویسیم

$$y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} \right)$$





۲) در پدیده دوپلر اگر یک چشمه صوتی متحرک با بسامد  $f_s$  با سرعت لحظه‌ای  $v_s$  حرکت کند، بسامد دریافت شده

توسط یک گیرنده ساکن  $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$  است که  $u$  سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای

وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد  $f_s$  در لحظه  $t'$  از چشمه منتشر

شود، در لحظه متفاوت  $t$  توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت  $v_s$  در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظه  $t'$

است و  $f$  بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظه  $t$  است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی با بسامد  $f_s$  از ارتفاع  $h$  از سطح زمین در لحظه  $t' = 0$  از حال سکون رها شود.

گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد  $f(t)$  دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند.

فرض کنید چشمه در زمان  $t'$  بعد از رها شدن، صوت با بسامد  $f_s$  منتشر می‌کند. شتاب گرانش را  $g$  بگیرید و از نیروی

مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

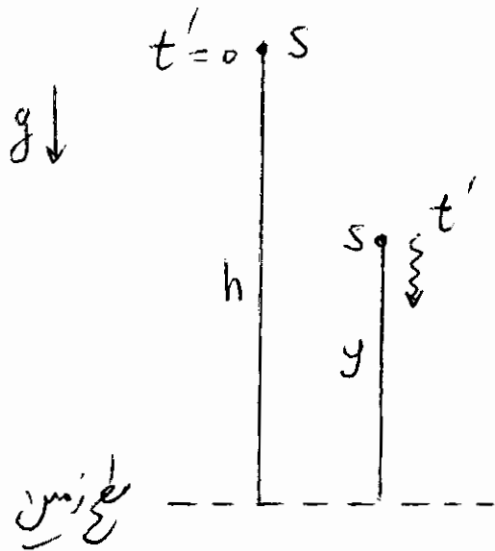
آ) زمان  $t'$  را بر حسب  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان  $t'$  یعنی  $v_s(t')$  را بر حسب  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرنده روی زمین در زمان  $t$ ، یعنی  $f(t)$  را بر حسب  $f_s$ ،  $u$ ،  $g$ ،  $h$  و  $t$  به

دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید  $\frac{1}{f^2} = A + Bt$  و  $A$  و  $B$  را بر حسب  $f_s$ ،  $u$ ،  $g$  و  $h$  تعیین کنید.



مسئله (۲)  
 (۱) ضربه در لحظه  $t'=0$  در ارتفاع  $h$  از سطح زمین

و در لحظه  $t'$  در ارتفاع  $y$  از سطح زمین است

و سرعت آن  $v_s$  است

$$v_s = gt' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظه  $t'$  ارسال می‌شود و در لحظه  $t$

به‌گیرنده در زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخذ

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}$$

$$v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}$$

(ب)

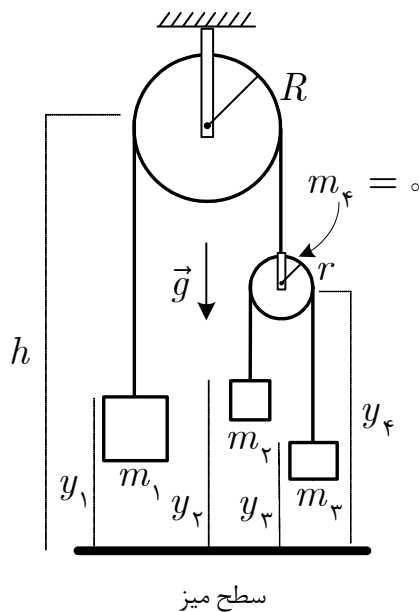
$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

(ج)

$$f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

$$\frac{1}{f(t)^2} = \frac{1}{f_s^2} \left( 1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u} \right) \quad \text{در نتیجه} \quad (د)$$

$$A = \frac{1}{f_s^2} \left( 1 + \frac{2gh}{u^2} \right), \quad B = -\frac{2g}{uf_s^2}$$



۳) سه جسم به جرم‌های  $m_1$ ،  $m_2$  و  $m_3$  به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقره متحرک را جسم چهارم به جرم  $m_4 = 0$  در نظر بگیرید. قرقره ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش  $g$ ، شعاع قرقره ثابت  $R$ ، شعاع قرقره متحرک  $r$ ، طول نخ روی قرقره ثابت  $D$  و طول نخ روی قرقره متحرک  $d$  است. در لحظه  $t = 0$  در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیه  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  و  $y_4$  از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  و  $a_4$  است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظه دلخواه  $t$  را به ترتیب  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  و  $y_4$  بگیرید.  $D$  و  $d$  را بر حسب این کمیت‌ها،  $h$  فاصله مرکز قرقره ثابت از سطح میز،  $R$  و  $r$  بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای  $i = 1, 2, 3, 4$ ، هر کدام از  $y_i$ ‌ها را بر حسب زمان، شتاب مربوطه  $a_i$  و فاصله اولیه از سطح میز  $y_{i0}$  بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظه  $t = 0$  بنویسید و با ترکیب نتیجه به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطه مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های  $m_1$ ،  $m_2$ ،  $m_3$  و قرقره متحرک بنویسید و با استفاده از رابطه بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیه شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را بر حسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم  $m_2$  چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

ج) با فرض  $y_{۳۰} = y_{۲۰}$ ، مدت زمانی که طول می کشد تا لبه بالایی جسم  $m_p$  هم تراز با پایین ترین نقطه قرقره

متحرک شود، چقدر است؟

(۳)  $\dot{m}$   
(۲)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h - y_1) + \pi R + (h - y_4) \\ d &= (y_4 - y_2) + \pi R + (y_4 - y_3) \end{aligned}}$$

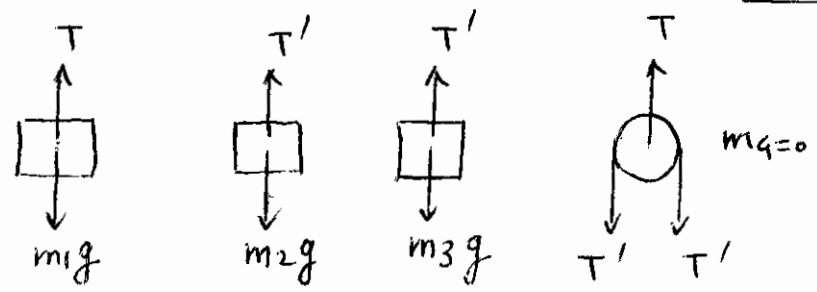
$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h - \frac{1}{2} a_1 t^2 - y_{10}) + \pi R + (h - \frac{1}{2} a_4 t^2 - y_{40}) \\ d &= (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_2 t^2 - y_{20}) + \pi R + (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_3 t^2 - y_{30}) \end{aligned}}$$

(ب) روابط قسمت (آ) برار کنیم  $t=0$  نیز  $\dot{m}$  در  $t=0$  است

$$\begin{aligned} D &= (h - y_{10}) + \pi R + (h - y_{40}) \\ d &= (y_{40} - y_{20}) + \pi R + (y_{40} - y_{30}) \end{aligned}$$

از  $\dot{m}$  به روابط قسمت (ب)  $\dot{m}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 t^2 - \frac{1}{2} a_4 t^2 = 0 \\ a_4 t^2 - \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ 2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ (1) \end{cases}$$



(ج) نمودار جسم آزاد  $m_4=0$

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1 & (۲) \\ T' - m_2 g &= m_2 a_2 & (۳) \\ T' - m_3 g &= m_3 a_3 & (۴) \\ T - 2T' - (0)g &= (0)a_4 & (۵) \end{aligned}$$

$T' = T/2$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در  $2m_2m_3$  ،  $m_1m_3$  ،  $m_1m_2$  ضرب و جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2 m_2 m_3 (T - m_1 g) + m_1 m_3 (T/2 - m_2 g) + m_1 m_2 (T/2 - m_3 g) = 0$$

$$\boxed{T = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} \quad , \quad T' = \frac{T}{2}}$$

با قرار دادن  $T$  و  $T'$  در معادلات (۲) و (۳) و (۴) ؛



$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ث (ت) بار این  $a_2 > 0$  و  $a_4 < 0$

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40} \quad ; \quad y_{20} = y_{30} \quad \text{(ج) وقتی}$$

$$y_2(t) = y_4(t) - r \quad \text{ی خواصم}$$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2 + \pi)$$

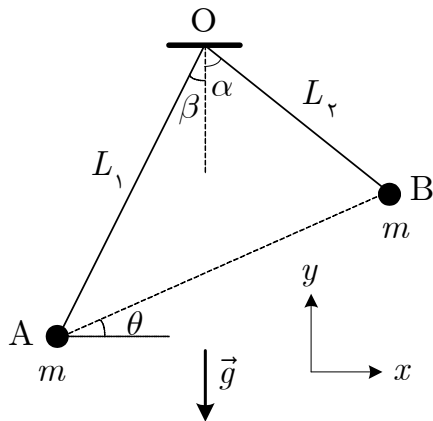
درستی

$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$m_3 > m_2$  و  $m_1$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2 + \pi)}{2g} \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}$$

درستی



۴) دو گلوله کوچک هر یک به جرم  $m$  دارای بار الکتریکی هم نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول های  $L_1$  و  $L_2$  متصل اند. دو انتهای دیگر نخ ها به تکیه گاهی واقع در نقطه  $O$  بسته شده اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله ها به گونه ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعه الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویه  $\alpha$  معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای  $x$  و  $y$  برای هر یک از گلوله ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\theta$ ، اندازه نیروی دافعه کولنی  $F$ ،  $mg$  و نیروی کشش نخ ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ،  $\tan \theta$  را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  به دست آورید.

پ) طول پاره خط  $AB$  را  $d$  بنامید.  $d \sin \theta$  و  $d \cos \theta$  را بر حسب  $L_1$ ،  $L_2$  و توابع مثلثاتی زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  بنویسید.

ت) زاویه  $\beta$  را بر حسب  $\frac{L_2}{L_1}$  و توابع مثلثاتی زاویه  $\alpha$  به دست آورید.

ث) نیروی کشش هر کدام از نخ ها را بر حسب  $mg$ ،  $\frac{L_2}{L_1}$  و توابع مثلثاتی زاویه  $\alpha$  به دست آورید.

ج) به ازای  $\frac{L_2}{L_1} = 1$  نیروی کشش هر کدام از نخ ها چقدر است؟



چ) فرض کنید طول نخها به اندازه ای است که  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  و  $\beta = \frac{\pi}{6}$  باشد. نیروی کشش هر کدام از نخها و اندازه

نیروی دافعه کولنی را بر حسب  $mg$  به دست آورید.

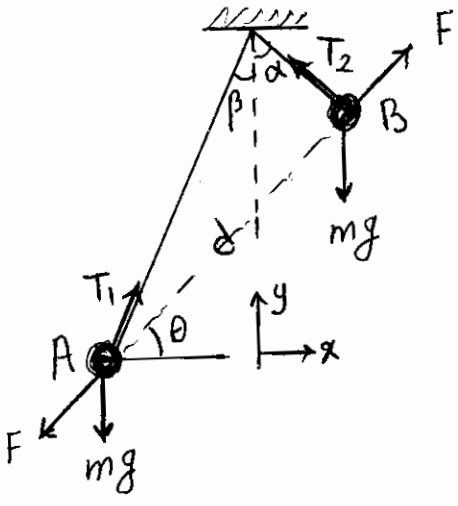
مسئله (۴)

بار جرم  $m$  است راستی

x:  $F \cos \theta - T_2 \sin \alpha = 0$  (۱)  
 y:  $F \sin \theta + T_2 \cos \alpha - mg = 0$  (۲)

بار جرم  $m$  است چپ

x:  $-F \cos \theta + T_1 \sin \beta = 0$  (۳)  
 y:  $-F \sin \theta + T_1 \cos \beta - mg = 0$  (۴)



(۳) با تکرار داریم  $T_2$  از معادله (۱) و معادله (۲)

$$F (\sin \theta + \cos \theta \cot \alpha) = mg \quad (۵)$$

و با تکرار دادن  $T_1$  از معادله (۳) و معادله (۴)

$$F (-\sin \theta + \cos \theta \cot \beta) = mg \quad (۶)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha) \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha \\ d \cos \theta &= L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha \end{aligned}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan \theta = \frac{L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha}{L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha} \quad (۸)$$

(۸) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\sin \beta = \frac{L_2}{L_1} \sin \alpha \quad (۹)$$

ث) با تکرار راجع  $\sin \beta$  از معادله (9) در معادله (7)

$$\tan \theta = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left( \frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \quad (10)$$

با حذف  $F$  بین دو معادله (1) و (2)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (11)$$

و با حذف  $F$  بین دو معادله (3) و (4) و استفاده از معادله (7)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (12)$$

با تکرار راجع (10) در (11)

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (13)$$

با تکرار راجع (10) در (12) و استفاده از معادله (9)

$$T_1 = \frac{2mg \left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (14)$$

ع) به اِذا ر  $L_1 = L_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

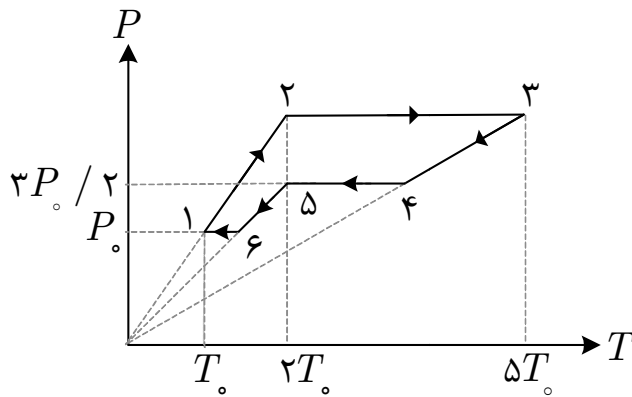
ب) به اِذا ر  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ،  $\beta = \frac{\pi}{6}$  از معادله (9) خواصم داشت

با تکرار راجع  $\frac{L_2}{L_1}$  در معادلات (13) و (14) و  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = mg \quad , \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = \sqrt{3}mg$$

از معادله (10) به دست می آید  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و در نتیجه

$$F = T_2 = mg$$



۵) چرخه ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند  $n$  مول گاز

کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های  $T_0$  و  $P_0$

معلوم‌اند. ثابت گازها  $R$  است. انرژی داخلی  $n$  مول

گاز کامل تک‌اتمی با دمای  $T$  برابر  $\frac{3}{2}nRT$  است.

آ) چرخه را در صفحه  $P-V$  رسم کنید و

مختصات  $(P, V, T)$  نقاط متناظر با شش نقطه نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب  $n$ ،  $R$  و  $T_0$  به دست آورید. این کار مثبت است یا

منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای  $1 \rightarrow 2$ ،  $2 \rightarrow 3$ ،  $3 \rightarrow 4$ ،  $4 \rightarrow 5$ ،  $5 \rightarrow 6$  و  $6 \rightarrow 1$  گاز از محیط گرما

می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب  $n$ ،  $R$  و  $T_0$  به دست آورید.

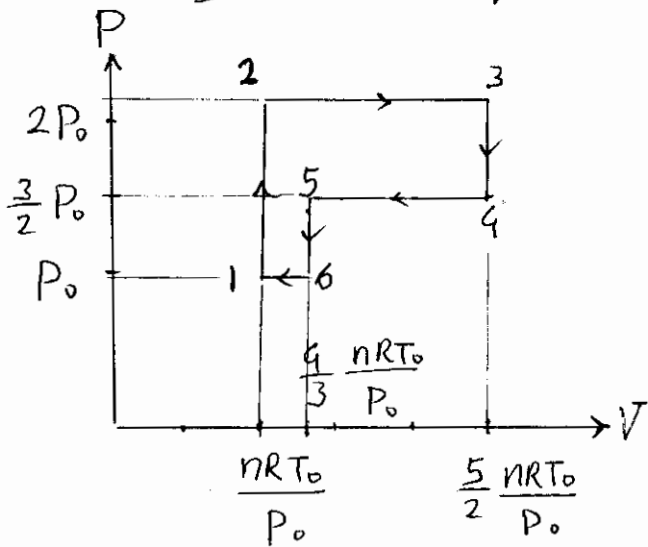
ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله ۵

(۲) با توجه به معادله گاز کامل  $PV = nRT$  در نمودار P

بر حسب T شیب (ضریب زاویه)  $\frac{nR}{V}$  است، بنابراین خطوط

دارای شیب یکسان هم رسم هستند



نقطه (۱)  $(P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, T_0)$

نقطه (۲)  $(2P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۳)  $(2P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, 5T_0)$

نقطه (۴)  $(\frac{3}{2} P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{15}{4} T_0)$

نقطه (۵)  $(\frac{3}{2} P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۶)  $(P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{4}{3} T_0)$

(ب) کار، صرفه منفی مساحت داخل چرخه،  $W$  در صفحه  $P-V$  است

$$|W| = \left( \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2} + \left( \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2}$$

$$|W| = \frac{11}{12} nRT_0$$

$W$  صرفه منفی است.

(پ) اگر  $Q$  گرمای داده شده به گاز در یک چرخه باشد

در فرآیندهای  $1 \rightarrow 2$  و  $2 \rightarrow 3$  گاز از محیط بیرون می‌گیرد:

$$Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

$$\frac{3}{2} nR(2T_0) - \frac{3}{2} nRT_0 = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{3}{2} nR(5T_0) - \frac{3}{2} nR(2T_0) = -(2P_0) \left( \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{15}{2} nRT_0$$

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{15}{2} nRT_0$$

بنا بر این

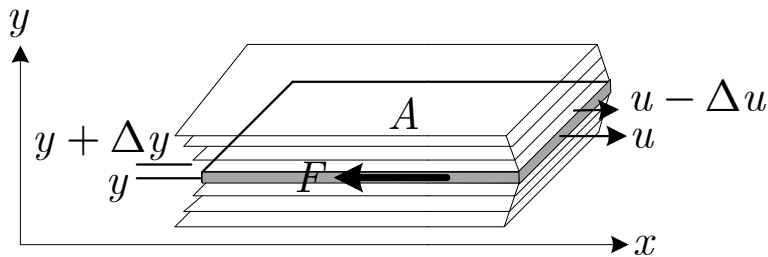
$$Q = 9nRT_0$$

$$\text{بازده} = \frac{\text{کار}}{\text{انرژی داده شده}} = \frac{11}{12} \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10}$$

(5)

$$\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \frac{1}{10}$$





۶) گرانیروی (Viscosity) خاصیتی از یک

سیال است که باعث کندی حرکت اجسام

نسبت به سیال می شود. سیال را به صورت

لایه هایی با ضخامت ناچیز  $\Delta y$  در نظر

بگیرید. اگر جسمی در راستای  $x$  با سرعت  $u$  در داخل یک سیال حرکت کند، لایه ای از سیال که در مجاورت آن است

تقریباً همراه آن کشیده می شود. لایه های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانیروی به حرکت در می آیند و هر چه در جهت

عمود بر لایه های متحرک (راستای  $y$  در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن ها کمتر می شود. به بیان دیگر اگر

$\Delta u$  اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد،  $\frac{\Delta u}{\Delta y}$  کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با

سیال  $A$  باشد نیروی اصطکاک  $F$  در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می شود که اندازه آن از رابطه

$$F = \eta A \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|$$

به دست می آید. در این رابطه،  $\eta$  ضریب گرانیروی نامیده می شود.

آ) واحد ضریب گرانیروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع  $r$  با سرعت  $u$  در داخل یک سیال گرانیرو حرکت کند می توان نشان داد نیروی اصطکاک

$F = 6\pi\eta r u$  به آن وارد می شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانیروی را

می توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع  $r$  و چگالی  $\rho$  داخل سیالی به چگالی  $\rho'$  ( $\rho > \rho'$ ) و ضریب گرانیروی  $\eta$  سقوط

می کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می رسد که به آن سرعت حد می گوئیم. این سرعت را بر حسب  $\rho$ ،  $\rho'$ ،  $\eta$ ،

$r$  و  $g$  به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطره کوچک کروی آب به قطر  $0.4 \text{ mm}$  را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر  $0.12 \mu\text{m}$  و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطریاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیه قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازه زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطره روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

ت) در شکل زیر رابطه خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحه بالایی به اندازه  $V$  از صفحه پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا  $u$  مثبت و در حرکت به سمت پایین  $u$  منفی فرض شده است. اگر  $V_0$  و  $-u_0$  به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطه خطی  $u$  بر حسب  $V$  باشد، شعاع قطره روغن و بار روی آن را بر حسب  $u_0$ ،  $V_0$ ،  $\eta$  (ضریب گرانروی هوا)،  $\rho_a$  (چگالی هوا)،  $\rho_0$  (چگالی روغن)،  $g$  (شتاب گرانش) و  $d$  (فاصله عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

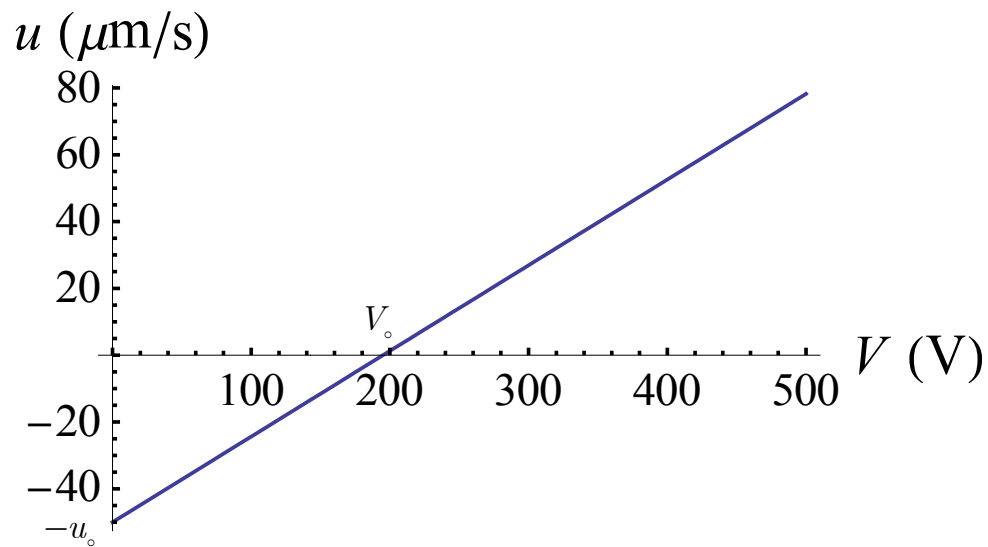
ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی  $V_0$  و  $u_0$  از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.



داده های عددی:

$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$  (آب) ،  $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$  (هوا) ،  $\rho_o = 880 \text{ kg/m}^3$  (روغن)

$\eta = 1.8 \times 10^{-5}$  (در دستگاه SI) ،  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  ،  $d = 1.0 \text{ mm}$

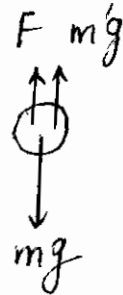


$$\frac{F}{A} = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right| \Rightarrow Pa = (\eta \omega) \left( \frac{m}{s} \right)$$

(4)  $\frac{m}{s}$   
(1)

$$(\eta \omega) = Pa \cdot s$$

بدان رسیدن به سرعت حد شد - جسم صغیر است، در نتیجه



(ب)

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6\pi r \eta u_{\infty} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho') g r^2}{\eta}$$

F : نیروی اصطکاک  
m'g : نیروی شناور  
mg : نیروی کشش

بدان قطر آبی به شعاع  $r = 0.2 \text{ mm}$  که در هوا  $\rho' = \rho_a$  سقوط می کند

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_w - \rho_a) g r^2}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{(1000 - 1.02)(9.8)}{1.8 \times 10^{-5}} (2 \times 10^{-4})^2$$

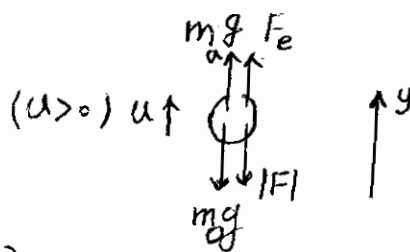
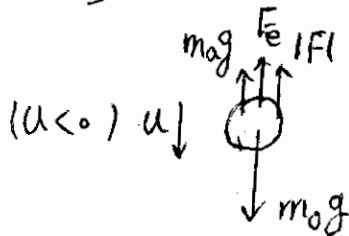
$$u_{\infty} = 4.8 \text{ m/s}$$

بدان دیدن گردان به شعاع  $r = 0.06 \mu\text{m}$

$$u_{\infty} = 0.44 \mu\text{m/s}$$

(پ)

(ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله در حالت تعین که  $u = 0$  است، نیروی الکتریکی وارد بد قطره روغن باید به سمت بالا باشد - بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را  $-191 \text{ mC}$  می گیریم.



نمودار جسم آزاد بد حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

$$191 \frac{V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r u = 0 \quad \text{در هر دو حالت:}$$

$$u_{\infty} = \frac{191}{6\pi \eta r d} \frac{V}{d} - \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_a) g r^2}{\eta}$$

از آنجا که  $\rho_a \ll \rho_0$  است از  $\rho_a$  در مقابل  $\rho_0$  چشم پوشی می کنیم. با توجه به نمودار:  
 به ازای  $V=0$  داریم  $u = -u_0$  در نتیجه

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}}$$

به ازای  $u = 0$  داریم  $V = V_0$  در نتیجه

$$|q| = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار  $r$  به دست می آوریم:

$$|q| = \frac{18 \pi d}{V_0} \sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2 \rho_0 g}}$$

(ث) با توجه به نمودار  $u_0 = 50 \mu\text{m/s}$  و  $V_0 = 195 \text{V}$  در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}} = 3 \sqrt{\frac{(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3 \times 10^{-5})}{4 \sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9 \times 10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44} \mu\text{m} \Rightarrow |r \approx 0.68 \mu\text{m}|$$

$$|q| = \frac{6 \pi \eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})(8 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})}{(195) \times (44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65 \times 11} \times 10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right) \left(\frac{6.28}{6.5}\right) \times 10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6) \times 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$|q| = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} = 3e$$